Jacek Rzępołuch, Akademia Podlaska
yacek84@interia.pl

Kartkowe latawce A4

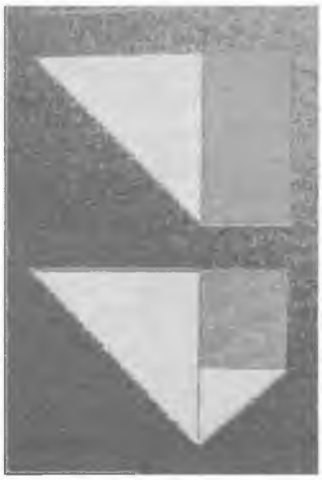
W tym artykule przedstawię problem zaprezentowany przez Lyndona Bakera na XV Krajowej Konferencji SNM-u. Postaram się ukazać „magię" zwykłej kartki papieru formatu A4 i przygody z jej wykorzystaniem do modelowania.

Już wiadomo, że z kartki papieru można złożyć wiele ciekawych figur, przykładem są romby oraz pięciokąt foremny (model przybliżony [K. Lipszyc 2000]). Pokażę jeszcze jedno wykorzystanie tej niby zwykłej, ale też magicznej kartki. Otóż z kartki można jeszcze zbudować inne czworościany. Czworościan, który ma jedną oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych nazywa się **deltoidem**. Taki deltoid, który jest **wypukły** nazywa się często **latawcem**. Deltoid ma przekątne prostopadłe.

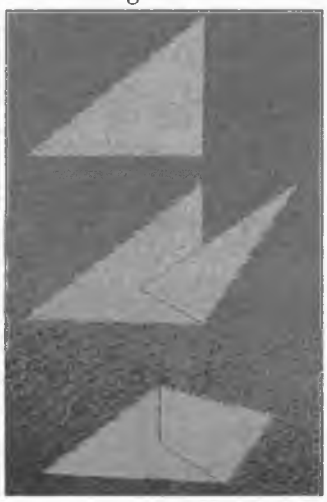
Każdy nauczyciel wie jak pomocna jest zwykła kartka papieru podczas prowadzenia lekcji, jak rozwija wyobraźnię i inwencję uczniów, można z niej zbudować wiele interesujących figur. Dlatego też polecam wykorzystanie opisanego przeze mnie problemu na lekcjach geometrii. Podobnie jak z Origami, gdzie wykorzystujemy kartki kwadratowe. Ale musimy na sprawę spojrzeć matematycznie.

Bierzemy się do roboty!!! Korzystamy z kartki papieru formatu A4 i składamy ją według poniższych schematów. Składamy dwa różne deltoidy. Oto sposób:

Pierwszy deltoid



Drugi deltoid



W wyniku składania kartki otrzymamy dwa deltoidy. Powstaje pytanie, czy są to dokładne deltoidy, czy tylko przybliżone? Może najpierw przyjrzyjmy się kartce papieru formatu A4, którą tak oto opisuje Krzysztof Mostowski w swoim artykule „Romby w prostokącie": Kartka papieru formatu A4 opisuje bardzo interesujący prostokąt. Według normy europejskiej ma on wymiary 297 na 210 mm.

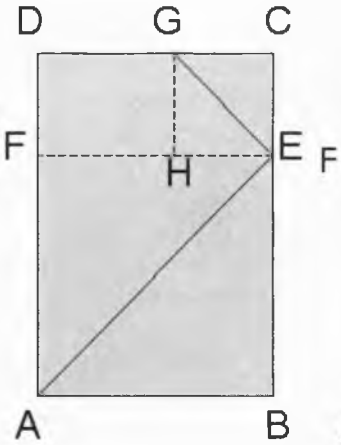
297/210 = 1.4142...

Podejrzanie blisko liczby $\sqrt{2}$. To właśnie miał być $\sqrt{2}$ bo kartka złożona na pół miała dawać prostokąt podobny do całej kartki. Tak była pomyślana norma przemysłowa DIN (Deutsche Industrie Norme) jeszcze w XIX wieku. Ale dla inżynierów trzeba było podać wymiary w milimetrach. Matematycy lepiej rozumieją o co chodzi, gdy powiedzieć, że rozmiary kartek papieru według normy DIN oparte są na proporcji $\sqrt{2}$. To jest proporcja podwojenia powierzchni. Intencje tych co projektowali tę normę były dla matematyków jasne.

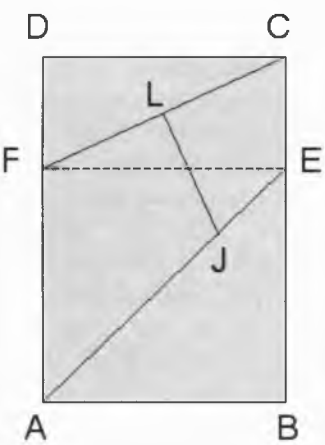
Różnica tych dwóch liczb 297/210 i $\sqrt{2}$ jest dużo mniejsza od grubości kartek papieru. Z dużą dokładnością można zatem powiedzieć, że stosunek boków tego prostokąta, dłuższego do krótszego, wyznacza liczba $\sqrt{2}$.

Dlatego, też wykorzystam ten fakt podczas sprawdzania, czy otrzymane figury są deltoidami i do moich obliczeń długość krótszego boku przyjmę jako 1, zaś dłuższego jako $\sqrt{2}$.

Zajmijmy się pierwszym z nich. W wyniku składania otrzymujemy deltoid AEGD (patrz rysunek 1) Uzasadnienie faktu, iż jest to deltoid jest sprawą prostą.



Rys. 1



Rys. 2

Odcinek AE jest przekątną kwadratu $ABEF$ o boku długości równym 1, zatem

$$|AE| = \sqrt{2}.$$

Stąd wynika, że już mamy dwa równej długości boki deltoidu. Boki AD i AE, gdyż

$$|AD| = |AE| = \sqrt{2}.$$

Pozostaje udowodnić równość boków DG i EG.

$$|DF| = |CE| = |GH| = |CG| = \sqrt{2} - 1.$$

Bok GE jest przekątną kwadratu $ECGH$ o boku długości równym $\sqrt{2} - 1$.

Zatem:

$$|GE| = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Możemy także obliczyć

$$|DG| = |DC| - |CG| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2}.$$

I już widzimy potrzebną równość boków:

$$|GE| = |DG| = 2 - \sqrt{2}.$$

Na podstawie powyższych obliczeń możemy stwierdzić, iż czworokąt *AEGD* powstały w wyniku składania kartki papieru formatu A4 jest deltoidem i jest to deltoid o obwodzie równym 4, gdyż:

$$|AE| = |EG| + |DG| + |AD| =$$
$$\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4.$$

Popatrzmy co dzieje się z drugim czworokątem. Czy to też jest dokładny deltoid? (Patrz rys.2)

Otrzymany w wyniku składania kartki A4 czworokąt na naszym rysunku jest czworokątem *AJLF*. Czy jest to deltoid? Musimy znaleźć długości jego boków i sprawdzić, czy odpowiednie są sobie równe. Jednak aby znaleźć te długości musimy wykorzystać pewną zależność widoczną podczas składania kartki. Otóż trójkąty *KEJ*, *JEH*, *HEI*, *IEC* są przystające, równoramienne o ramieniu długości $\sqrt{2} - 1$ i kąt pomiędzy ramionami równy jest 45°. Można powiedzieć, że figura *KCIHJ*, zbudowana z tych trójkątów, jest połową ośmiokąta foremnego. Wykorzystując ten fakt możemy obliczyć długości potrzebnych boków deltoidu. Podczas obliczeń wykorzystujemy długości już wcześniej obliczone, gdyż odpowiednie odcinki pokrywają się ze sobą. I tak oto:

$$|AF| = |AD| - |FD| = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1.$$
$$|AJ| = |AE| - |JE| = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1.$$

Stąd otrzymujemy, że $|AF| = |AJ| = \sqrt{2} - 1$.

A co jest z bokami *FL* i *LJ*?

Długość boku *FL* jest równa połowie długości odcinka *FC*, który jest przeciwprostokątną w trójkącie *FCD*. Zatem z twierdzenia Pitagorasa:

$$|FC|^2 = |FD|^2 + |DC|^2.$$
$$|FC| = \sqrt{1^2 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$
$$|FL| = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 0{,}5411961001.$$

Teraz poszukam długości boku *LJ*. I tak oto otrzymujemy: $|LJ| = |JH| + |HL|$.

Bok *HL* jest przyprostokątną w trójkącie *FHL*, w którym

$$|FH| = |DG| = 2 - \sqrt{2} \text{ i } |FL| = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Zatem z twierdzenia Pitagorasa:

$$|HL|^2 = |FH|^2 - |FL|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right)^2 =$$
$$= 5 - 3{,}5\sqrt{2}.$$
$$|HL| = \sqrt{5 - 3{,}5\sqrt{2}} \approx 0{,}2241707646.$$

Natomiast długość odcinka *JH* możemy znaleźć z twierdzenia cosinusów, wykorzystując trójkąt *JEH* i jego własności.

$$|JH|^2 = |HE|^2 + |JE|^2 - 2|HE||JE|\cos 45° =$$
$$= (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 - 2(\sqrt{2} - 1)^2\frac{\sqrt{2}}{2} = .$$
$$= 2(\sqrt{2} - 1)^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(2 - 2\sqrt{2} + 1)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2} = 10 - 7\sqrt{2}.$$
$$|JH| = \sqrt{10 - 7\sqrt{2}} \approx 0{,}3170253356.$$

Stąd

$$|LJ| \approx 0{,}2241707646 + 0{,}3170253356 = 0{,}5411961002.$$

Zatem widzimy, że długości *LJ* i *FL* równią się pomiędzy sobą o 0,0000000001, czyli są to minimalne różnice i może to jest kwestia dokładności obliczeń na kalkulatorze? przyjąć równość tych boków? Praktycznie możemy stwierdzić, iż czworokąt *AJLF* powstały w wyniku składania kartki formatu A4 jest deltoidem. Ale czy jego model matematyczny też jest deltoidem, „idealnym" deltoidem? Otrzymane wyrażenia na *FL* i $LJ = LH + HJ$ wydają się różne, ale wartości liczbowe otrzymane z kalkulatora są podejrzanie bliskie. Kalkulator zachęca do dokładnego sprawdzenia tego. I aby tego dokonać należy wykazać równość:

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{5 - 3{,}5\sqrt{2}} + \sqrt{10 - 7\sqrt{2}} \quad (*)$$

Równość ta wydaje się nie być prawdziwą, ale przypatrzmy się jej bliżej. Są dwa sposoby jej udowodnienia.

Jeden jest prosty i po najmniejszej linii oporu, drugi zaś jest trochę bardziej wyszukany, którego pomysł podsunął mi Krzysztof Mostowski. W obu wykorzystujemy pewien fakt, iż:

$$\sqrt{5 - 3{,}5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

Oto pierwszy sposób.

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} + \sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

Po obustronnym podniesieniu do kwadratu, otrzymujemy:

$$\frac{1}{4}(4 - 2\sqrt{2}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2(10 - 7\sqrt{2})$$
$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1\right)\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$
$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 + 10\sqrt{2} + 10 - \frac{7}{2}\sqrt{2} - 14 - 7\sqrt{2}$$
$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem równość (*) jest prawdziwa.

Oto drugi sposób:

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

Zaczynam już od przekształconej wcześniej równości.

Dzieląc obustronnie przez $\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$ otrzymamy:

$$\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{2}}{10 - 7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$
$$(4 - 2\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(10 - 7\sqrt{2}) =$$
$$= 10a - 7a\sqrt{2} + 10b\sqrt{2} - 14b.$$

Skąd otrzymujemy taki oto układ równań:

$$\begin{cases} 10a - 14b = 4 \\ (-7)a + 10b = -2. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu pozostawiam czytelnikowi. W wyniku rozwiązania otrzymamy $a = 6$ i $b = 4$.

Zatem:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(6+4\sqrt{2})(10-7\sqrt{2})}{10-7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+4\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

Ponownie otrzymaliśmy prawdziwość równości (*).

Jednak rzeczywiście *FL* = *LJ*.

Popatrzmy co otrzymaliśmy. Otóż kolejny raz widzimy wykorzystanie kartki papieru formatu A4. Tym razem wykorzystujemy ją do budowy deltoidów materialnych, które są modelami tych idealnych, matematycznych. A może te idealne, geometryczne są modelami matematycznymi tych materialnych, skonstruowanych z kartek papieru formatu A4?

Przy rozwiązywaniu problemów relacja **model i to, co modelowane** często się odwraca. To, co modelowane gra rolę modelu dla tego co pierwotnie było modelem. Takie zmiany „o 180 stopni" często pomagają naszej intuicji.

Kolejny raz zadziwia nas wykorzystanie kartki A4 do modelowania. Tym razem ta „drobna różnica" okazuje się po prostu zerem!

Literatura

O kartce papieru A4 może przeczytać więcej:
Katarzyna Lipszyc, *Ta drobna różnica*, NiM 42 lato 2002 s.16-17,
Krzysztof Mostowski, *Romby w prostokącie*, NiM 28 zima 1998, s. 12-13,